Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук, 2017, 21(2): 38–46

УДК 331.36:330.4

Ye.M. Ilyin, N.G. Kosolapenko

MODELLING NATURAL UNEMPLOYMENT RATE IN ECONOMY WITH CONSTANT NUMBER OF ECONOMICALLY ACTIVE POPULATION

Evgeniy Ilyin – leading researcher, St. Petersburg Institute of Economics and Mathematics of Russian Academy of Science, PhD in Physics and Mathematics, St. Petersburg; **e-mail: emil@emi.nw.ru**.
Nina Kosolapenko – researcher, St. Petersburg Institute of Economics and Mathematics of Russian Academy of Science, St. Petersburg; **e-mail: nina_k@emi.nw.ru**.

We research the problem of conditions for the existence of the natural unemployment level for two aggregate dynamic models of the economy with constant number of economically active population. In the first model, as in most aggregated models of economic growth, investment instantly turns into fixed capital. The second model takes into account the process of gradual transformation of investment into fixed assets. We model the transformation process applying a stationary Poisson process. By comparing the models in question, we analyze the effect of investment time lag on the conditions of natural unemployment level. The models are formalized as systems of ordinary differential equations; the conditions for the asymptotic stability of the systems' solutions are investigated. We show that ceteris paribus, the values of the natural level of unemployment in both models coincide, but the conditions for their stability differ. The examples demonstrating the coincidence of sufficient stability conditions are given.

Keywords: *mathematical modeling; aggregated models of economic growth; natural rate of unemployment; time lag; asymptotic stability of decisions; employment rate; capital available; dynamics of fixed capital.*

Е.М. Ильин, Н.Г. Косолапенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОГО УРОВНЯ БЕЗРАБОТИЦЫ В ЭКОНОМИКЕ С ПОСТОЯННОЙ ЧИСЛЕННОСТЬЮ ЭКОНОМИЧЕСКИ АКТИВНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Евгений Михайлович Ильин – ведущий научный сотрудник ФГБУН «Санкт-Петербургский экономико-математический институт Российской Академии наук», кандидат физико-математических наук, г. Санкт-Петербург; **e-mail: emil@emi.nw.ru**.
Нина Георгиевна Косолапенко – научный сотрудник ФГБУН «Санкт-Петербургский экономико-математический институт Российской Академии наук», г. Санкт-Петербург; **e-mail: nina_k@emi.nw.ru**.

В статье исследуется вопрос об условиях существования естественного уровня безработицы для двух агрегированных динамических моделей экономики с постоянной численностью экономически активного населения. В первой модели, как в большинстве агрегированных моделей экономического роста, инвестиции мгновенно переходят в основной капитал. Во второй модели учитывается процесс постепенного преобразования инвестиций в основной капитал. Процесс преобразования моделируется стационарным пуассоновским процессом. Путем сравнения моделей анализируется влияние временного лага инвестиций на условия существования естественного уровня безработицы. Модели формализуются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений; исследуются условия асимптотической устойчивости решений этих систем. Показано, что при прочих равных условиях величины естественного уровня безработицы в обеих моделях совпадают, а условия их устойчивости различаются. Приведены примеры, в которых также совпадают и достаточные условия устойчивости.

Ключевые слова: *математическое моделирование; агрегированные модели экономического роста; естественный уровень безработицы; временной лаг; асимптотическая устойчивость решений; уровень занятости населения; капиталовооруженность; динамика основного капитала.*

Введение. В работе рассматриваются две агрегированные динамические модели экономики с постоянной численностью экономически активного населения (ЭАН) и исследуется вопрос об условиях существования естественного уровня безработицы. В первой модели, как и в большинстве агрегированных моделей экономического роста, считается, что инвестиции мгновенно переходят в основной капитал. Вторая модель отличается тем, что в ней учитывается процесс постепенного преобразования инвестиций в основной капитал. Процесс преобразования моделируется стационарным пуассоновским процессом. Модели формализуются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и с математической точки зрения в обеих моделях речь идет об исследовании условий асимптотической устойчивости решений этих систем.

Рассмотрим экономически активное население (ЭАН) постоянной численности h. ЭАН, как известно, включает две группы населения: занятых (работающих) и безработных (лица не работающие, ищущие работу и готовые приступить к работе). Численность этих групп обозначим соответственно через x и y, $x + y = h$, $0 \le x \le h$. $0 \le y \le h$.

Практически всегда и во всех экономиках наблюдается определенное количество безработных (уровень безработицы – доля безработных в ЭАН, т.е. отношение y\h). Для объяснения этого явления используется широкий спектр точек зрения (см., например, [11; 15]). Одна из наиболее распространенных связывает наличие постоянной безработицы с отклонениями реальных рынков труда от модели рынка с совершенной конкуренцией (невальрасовские свойства рынка труда). Данные статистики свидетельствуют, что значимая доля безработицы – неизбежное следствие экономической динамики и сложной структуры реальных рынков труда [11]. Ниже мы будем придерживаться именно такой точки зрения.

Между категориями занятых и безработных происходит непрерывный обмен, причем встречные потоки (оборот) зачастую весьма значительны. Обмен может быть вызван добровольными увольнениями, вынужденным уходом, реорганизацией рабочих мест, связанной с технологическими сдвигами, возрастными изменениями состава ЭАН, циклическими колебаниями спроса и предложения, наличием и размером пособия по безработице и многими другими причинами. Немалая часть безработных трудоустраивается достаточно быстро (в течение одного-двух месяцев). В то же время значителен удельный вес длительной безработицы.

Большая часть наблюдаемой безработицы отражает то, что обычно называется фрикционной безработицей. Фрикционная безработица обусловлена поиском людьми работы, поскольку благодаря неоднородности экономических агентов рынка труда, несовершенством имеющейся у них информации установление соответствия между безработными и вакансиями требует времени. Уровень фрикционной безработицы зависит не только от эффективности процесса совмещения спроса и предложения, но и от числа увольнений и открывающихся вакансий.

Фрикционная безработица тесно связана с другой категорией незанятости, которую называют «структурной безработицей». Структурная безработица вызвана несоответствием профессионально-квалификационной структуры спроса и предложения рабочей силы. Возникает этот тип безработицы потому, что профессионально-квалификационный состав рабочей силы меняется медленнее и не отвечает в полной мере новой, сложившейся под влиянием технологических изменений или отраслевой перестройки, структуре рабочих мест. Существенное различие между фрикционной и структурной безработицей заключается в том, что первая более кратковременна, а вторая – связана с длительными периодами незанятости и поэтому с социально-экономической точки зрения более важна. Причина подобного расхождения кроется в различном профессиональном и квалификационном составе этих категорий безработных. Для безработных первой группы квалификация практически соответствует требованиям, предъявляемым фирмами, а ко второй группе относятся лица, которые сразу не могут получить работу. Для трудоустройства они должны пройти переподготовку или переобучение или поменять место жительства.

Структурная и фрикционная безработицы – виды безработицы, которые существуют и тогда, когда экономика находится на уровне полной занятости, т.е. в состоянии длительного макроэкономического равновесия, поэтому они тесно связаны с так называемым «естественным уровнем безработицы». Под естественным уровнем безработицы мы будем понимать такой долгосрочный равновесный уровень безработицы, к которому в длительной перспективе при стремлении экономики к равновесию наблюдается тенденция движения текущих уровней безработицы (см. [12]). Естественный уровень безработицы называют также «уровнем безработицы при полной занятости», имея в виду, что при этом экономика находится в длительном макроэкономическом равновесии. Таким образом, с нашей точки зрения, уровень безработицы при полной занятости и естественный уровень безработицы – совпадающие понятия. Отметим, что иногда под естественным уровнем безработицы понимают средний уровень, т.е. уровень, вокруг которого происходят колебания уровня безработицы.

Другие факторы возникновения безработицы, например жесткость заработной платы, т.е. ее неспособность к гибкому изменению, могущему привести в соответствие спрос и предложение на рабочую силу, в нашей модели не рассматриваются.

Предполагается, что численность занятых, безработных и число вакансий определяют интенсивность (скорость) трудоустройств. В модели число вакантных рабочих мест определяется размером основного капитала. Эту зависимость будем описывать функцией $\varphi(v)$, где v – величина основного капитала. Интенсивность трудоустройств зависит также и от численности работающих. Действительно, чем больше уровень занятости населения, тем сильнее влияние структурной составляющей безработицы. Так, из-за постоянной численности ЭАН у фирм сокращается выбор работников походящих профессий и квалификаций, растут их требования к размеру заработной платы. В случае ограниченного числа вакансий в экономике высокий уровень занятости снижает вероятность трудоустройства лиц низкой квалификации, а также молодежи, впервые вступающей на рынок труда. Вероятность трудоустройства очевидным образом зависит и от интенсивности поиска отдельным работником, а при небольшой численности безработных среди них мала доля высокоактивных. Влияние численности работающих на скорость изменения их численности будем задавать с помощью функции $a(x)$. Кроме того, будем учитывать зависимость интенсивности трудоустройств от условий «внешней среды». Эту зависимость выразим функцией $q(x)$, представляющей собой сальдо потоков увольнений (или, что то же самое, высвобождения рабочих мест) и потока вакансий, создаваемых за счет внешних инвестиций, причем знак сальдо зависит от численности занятых.

В соответствии со сделанными предположениями интенсивность изменения численности занятых описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a(x)\varphi(v)y(x) - q(x) \equiv P(x,v); \;\; y(x) = h - x. \quad (1)$$

Величина выпуска задается производственной функцией. Рассматривается производственная функция $f(v,x)$ неоклассического типа, т.е. предполагается, что выполняются следующие свойства: положительная и убывающая предельная производительность факторов

$$\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} < 0,$$

постоянная отдача от масштаба

$$f(\rho v, \rho x) = \rho f(v,x), \;\; \rho \geq 0,$$

и условия Инады

$$\lim_{x\to 0} f(v,x) = \lim_{v\to 0} f(v,x) = \infty; \;\; \lim_{x\to\infty} f(v,x) = \lim_{v\to\infty} f(v,x) = 0 \cdot$$

Перечисленные свойства предполагают, что каждый фактор необходим для производства: $f(0,x) = f(v,0) = 0$.

Изменение величины капитала описывается стандартным уравнением

$$\frac{dv}{dt} = s(x)\,f(v,x) - \delta v \equiv Q(x,v), \qquad (2)$$

т.е. определяется разностью величин инвестиций $s(x)\,f(v,x)$, $0 < s(x) < 1$ и амортизации капитала δv, $0 < \delta < 1$. Норма сбережения $s(x)$ зависит от численности занятых, что представляется достаточно естественным, а норма амортизации δ постоянна и задается экзогенно.

Всюду ниже будем предполагать, что входящие в систему дифференциальных уравнений функции имеют достаточную гладкость, например, дважды непрерывно дифференцируемы.

Модели типа (1), (2) находят применение при моделировании разнообразных механизмов социальной самоорганизации населения под влиянием «информационного фактора» (параметра обратной связи) [5; 7], в том числе и при моделировании процессов внутренней миграции [6]. В нашей модели роль «информационного фактора» играет основной капитал, интенсивность изменения которого зависит от численности занятого населения.

В сформулированной модели, как и во многих агрегированных моделях экономического роста, предполагалось, что инвестиции мгновенно превращаются в основной капитал [2]. Это предположение не может быть принято безоговорочно, поскольку хорошо известно, что инвестиции разного вида переходят в основной капитал с различной временной задержкой – лагом (см. [8]). Во второй части работы анализируется модель установления естественного уровня безработицы, учитывающая указанное обстоятельство.

1. Исследование условий асимптотической устойчивости системы уравнений (1), (2). Анализ условий существования естественного уровня безработицы проходит в два этапа. В первую очередь, необходимо выяснить существуют ли у системы дифференциальных уравнений (1), (2) стационарные точки[1], т.е определить, разрешима ли система уравнений

$$\begin{aligned} P(x,v) &= a(x)\varphi(v)y(x) - q(x) = 0; \\ Q(x,v) &= s(x)\,f(v,x) - \delta v = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

и каковы области изменения коэффициентов, обеспечивающих нужные свойства решений этой системы. Второй этап складывается из проверки условий асимптотической устойчивости существующих стационарных точек.

Будем считать, что производственная функция $f(v,x)$ линейно однородна ($\rho = 1$) и норма сбережения постоянна: $s = const$. Введем переменную $k = v/x$ (капиталовооруженность труда). Хорошо известно (см. например, [2; 6]), что при сделанных нами предположениях уравнение $sf(k,1) - \delta k = 0$ имеет единственное решение $k^* > 0$. Выразим v как функцию от x: $v = k^*x$, тогда стационарные значения x^* должны удовлетворять уравнению $P(x, v(x)) = 0$. Если это уравнение разрешимо, то стационарные значения капитала: $v^* = k^*x^*$. В рамках наших предположений о коэффициентах системы можно указать широкий класс условий, обеспечивающих существование и единственность решений уравнения $P(x, v(x)) = 0$. Мы, однако, этого делать не станем, а постулируем существование на сегменте $[0, h]$ по крайней мере одного решения.

Подобный способ определения равновесной капиталовооруженности не дает никаких оснований полагать, что отвечающий ему естественный уровень безработицы является эффективным, т.е. оптимальным относительно какого-либо критерия. Условия выбора s и k, обеспечивающие максимум потребления, дают возможность определить соответствующую этому состоянию экономики численность занятых и тем самым обеспечить «эффективный» естественный уровень безработицы. Для этого, как известно [5], надо максимизировать по k и s функцию $(1 - s)\,f(k,1)$ при условии $sf(k,1) - \delta k = 0$ Оптимальное значение k^* находится как решение уравнения $\partial f(k,1)/\partial k = \delta$ (уравнение имеет единствен-

[1] В другой терминологии – стационарные состояния, равновесные состояния, точки покоя, точки равновесия.

ное решение), а x^*, как и раньше, вычисляется из уравнения $P(x, v(x)) = 0$.

Всюду ниже значения некоторой функции $g(x,v)$ и ее производных, вычисленных в стационарной точке (x^*,v^*), будем обозначать следующим образом: $g(x^*,v^*) \equiv g^*$, $g_x\,(x^*,v^*) \equiv g_x^*$, $g_v\,(x^*,v^*) \equiv g_v^*$. Так, например, для производственной функции $f(v^*,x^*) \equiv f^*$, $f_x\,(v^*,x^*) \equiv f_x^*$ или для производной функции $q(x)$: $q_x(x^*) \equiv q_x^*$.

Рассмотрим невырожденный случай равновесия, другими словами, вариант $x^* > 0$, $v^* > 0$. Будем предполагать, что $a^*\varphi^* \neq 0$, $q^* \neq 0$, откуда следует, что $y \neq 0$. Из первого уравнения (3) найдем стационарные значения y^* и получим ограничения на коэффициенты системы дифференциальных уравнений

$$y^* = \frac{q^*}{a^*\varphi^*}, \qquad 0 < \frac{q^*}{a^*\varphi^*} < h. \tag{4}$$

Условие (4) требует согласования знаков коэффициентов в точке равновесия:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{если } q^* > 0, \textit{ то } a^* > 0,\ \varphi^* > 0, \textit{ или } a^* < 0,\ \varphi^* < 0; \\ \textit{если } q^* < 0, \textit{ то } a^* > 0,\ \varphi^* < 0, \textit{ или } a^* < 0,\ \varphi^* > 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Отсюда следует, что в стационарной точке либо все три функции должны быть строго положительны, либо только одна из них.

Исследование условий асимптотической устойчивости стационарных точек сводится, как известно, к анализу собственных чисел матрицы Якоби T^* системы уравнений (3), вычисленной в стационарной точке (v^*,x^*) (см., например, [1; 9]):

$$T^* = \begin{pmatrix} P_x^* & P_v^* \\ Q_x^* & Q_v^* \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{ll} P_x^* = a_x^*\varphi^* y^* - a^*\varphi^* - q_x^*, & P_v^* = a^*\varphi_v^* y^*, \\ Q_x^* = sf_x^*, & Q_v^* = sf_v^* - \delta. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Будем предполагать, что все состояния равновесия (v^*,x^*) простые, то есть считаем, что $\det T^* \neq 0$, и, кроме того, собственные числа не равны. Простые состояния равновесия являются изолированными.

Действительные части собственных чисел будут отрицательны тогда и только тогда, когда одновременно

$$\mathrm{tr}T^* < 0, \qquad \det T^* > 0. \tag{7}$$

Если оба собственных числа действительны и отрицательны, то точка покоя называется устойчивым узлом. Все траектории стремятся к узлу по определенным направлениям. Когда собственные числа представляют комплексно сопряженную пару с отрицательной действительной частью, то точка покоя называется устойчивым фокусом. В этом случае траектории имеют вид спиралей и касательные не стремятся к определенному пределу при стремлении точек касания к точке покоя. Разница между узлом и фокусом проявляется в том, что в последнем случае переходный режим оказывается осциллирующим.

Преобразуем формулы (6), используя равенство (4) и теорему Эйлера, тогда

$$\left.\begin{array}{l} P_x^* = q^*\left[\dfrac{a_x^*}{a^*} - \dfrac{q_x^*}{q^*} - \dfrac{1}{y^*}\right], \quad P_v^* = q^*\dfrac{\varphi_v^*}{\varphi^*}, \\ Q_x^* = k^*\delta\sigma, \quad Q_v^* = -\delta\sigma, \quad \sigma \equiv \dfrac{x^* f_x^*}{f^*}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Поскольку σ – доля труда в объеме выпуска, то $\sigma > 0$, поэтому $Q_x^* > 0$, а $Q_v^* < 0$. Отсюда видно, что условия асимптотической устойчивости формулируются в терминах темпов прироста (относительных скоростей изменения) коэффициентов уравнения (1) и доли труда в объеме выпуска.

При помощи (8) выпишем подробно условия асимптотической устойчивости (7)

$$\mathrm{tr}T^* = P_x^* + Q_v^* = q^*\left[\frac{a_x^*}{a^*} - \frac{q_x^*}{q^*} - \frac{1}{y^*}\right] - \delta\sigma < 0. \tag{9}$$

Очевидно, (9) будет справедливо, если $P_x^* \leq 0$. Для второго условия (7) имеем

$$\det T^* = Q_v^*\left(P_x^* + k^*P_v^*\right) > 0.$$

Поскольку $Q_v^* < 0$, то для положительности детерминанта матрицы T^* достаточно, чтобы

$$P_x^* + k^*P_v^* = q^*\left[\frac{a_x^*}{a^*} - \frac{q_x^*}{q^*} - \frac{1}{y^*} + k^*\frac{\varphi_v^*}{\varphi^*}\right] < 0. \tag{10}$$

Таким образом, мы получили, что для асимптотической устойчивости точек равновесия модели для них должны выполняться неравенства (9) и (10). Отметим, что неравенства (10) и $P_v^* \geq 0$ влекут $P_x^* < 0$, а, следовательно, и (9). В наиболее важном случае, т.е. при $q^* > 0$, устойчивость будет обеспечена, если

$$\frac{a_x^*}{a^*} \leq 0, \qquad \frac{q_x^*}{q^*} \geq 0, \qquad \frac{\varphi_v^*}{\varphi^*} \leq 0. \tag{11}$$

Для того, чтобы стационарная точка была невырожденным узлом, необходимо и достаточно, чтобы было строго положительно выражение

$$\Delta = \left(P_x^* - Q_v^*\right)^2 + 4Q_x^* P_v^* > 0 .$$

Учитывая, что $Q_x^* > 0$, для выполнения этого неравенства достаточно, чтобы $P_v^* \geq 0$, т.е. $q^*(\varphi_v^*/\varphi^*) \geq 0$.

Разберем теперь ряд частных случаев задания коэффициентов уравнения (1).

Начнем с варианта $q^* > 0$ и $\varphi(v) = v$. Теперь из первого уравнения (3) и требования $y^* > 0$ вытекает, что $a^* > 0$. Поскольку сейчас $P_v^* > 0$, то стационарные точки будут узлами. Неравенство (9) не меняется, а (10) преобразуется к виду

$$P_x^* + k^* P_v^* = q^* \left[\frac{a_x^*}{a^*} - \frac{q_x^*}{q^*} - \frac{1}{y^*} + \frac{1}{x^*} \right] < 0 .$$

Сделаем вполне реалистичное предположение, посчитав, что в стационарной точке численность занятого населения больше, чем численность безработных: $x^* > y^*$. Если дополнительно окажется, что $q_x^* > 0$ и $a_x^* < 0$, то точка равновесия будет устойчивым узлом. Можно отказаться от условия $x^* > y$, заменив его дополнительными требованиями к функциям $q(x)$ и $a(x)$. Пусть, например, на всем интервале $[0,h]$ функция $a(x)$ убывает достаточно быстро (достаточно, чтобы коэффициент эластичности был меньше минус единицы) и $q_x^* > 0$. Еще один вариант, – $a_x^* < 0$, и функция $q(x) = qx$, $q > 0$, или пусть $q(x)$ выпукла на интервале $[0,h]$ и $q(0) = 0$, тогда равновесие будет устойчиво, поскольку $q^*/x^* - q_x^* < 0$.

Дополним предыдущий вариант задания коэффициентов, положив $a(x) = ax$, $a > 0$, $q(x) = qx$, $q > 0$. Пусть k^* – значение равновесной капиталовооруженности. Положительные стационарные точки должны удовлетворять квадратному уравнению $ak^*x(h - x) = q$, т.е.

$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{q}{ak^*}} .$$

Очевидно, что при

$$k^* > \frac{4q}{ah^2} \qquad (12)$$

оба корня принадлежат интервалу $(0,h)$. Поскольку $P_x^* = -(qx/y) < 0$, то $\mathrm{tr}T^* < 0^*$. Условие (10) примет вид

$$P_x^* + k^* P_v^* = q\left[1 - \frac{x^*}{y^*}\right] < 0 , \qquad (13)$$

откуда вытекает, что стационарная точка x_1 – устойчивый узел (т.к. $x_1 > h/2$), а равновесие x_2 – неустойчиво. Условие (12) всегда можно выполнить за счет подходящего выбора параметров s и δ. Равновесная численность работников тем ближе к уровню полной занятости, чем меньше величина отношения q/ak^*.

Рассмотрим пример функции $a(x)$, убывающей с ростом x: $a(x) = a/x$, $a > 0$. Теперь интенсивность трудоустройств определяется капиталовооруженностью и численностью занятых: $dx/dt = aky(x) - q(x)$. Поскольку предполагается, что $y^* > 0$, то автоматически $q^* > 0$.

Неравенство (10) упростится:

$$P_x^* + k^* P_v^* = -q^* \left[\frac{q_x^*}{q^*} + \frac{1}{y^*} \right] < 0 .$$

Для асимптотической устойчивости состояния равновесия, определяемого из уравнения $ak^*(h - x) = q(x)$, достаточно, чтобы выражение в квадратных скобках было положительно, поскольку тогда выполнено и (9). Очевидно, что в практически важном случае $q(x) = qx$, $q > 0$, имеем $x = ak^*h/(ak^* + q)$ и условия устойчивости для этого равновесия выполнены.

Рассмотрим теперь некоторые исключительные варианты. Допустим, что у функции $a(x)$ и $q(x)$ одновременно обращаются в нуль в какой-либо внутренней точке x^* интервала $[0,h]$. Очевидно, что эта точка будет состоянием равновесия, соответствующим численности безработных $y^* = h - x^*$. Поскольку теперь $P_v^* = 0$, то матрица Якоби T^* будет треугольной, и ее собственные числа легко найти

$$\mu_1 = a_x^* \varphi^* y^* - q_x^* , \quad \mu_2 = -\delta\sigma < 0.$$

Отсюда следует, что при $\mu_1 < 0$ точка равновесия – устойчивый узел.

Проверим условия устойчивости для состояния полной занятости. Такое равновесное состояние экономики может возникнуть, если $q(h) = 0$ и $a(h)\varphi(k^*h) \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю выясняется, что состояние равновесия при полной занятости будет устойчивым узлом, когда $a^*\varphi^* + q_x^* > 0$.

Заметим, что при проверке условий асимптотической устойчивости мы использовали лишь дифференцируемость и свойство линейной однородности функции $f(v,x)$. Вогнутость и условия Инады потребовались для обоснования наличия неподвижных точек системы дифференциальных уравнений.

Аналогичным образом можно найти условия устойчивости и для положительно однородных функций $f(v,x)$, но они формулируются более сложно. Вернемся к исходной постановке задачи и будем считать, что производственная функция имеет степень однородности ρ, $0 < \rho$, а норма сбережения – $s = s(x)$. Теперь изложенный выше способ нахождения стационарных точек, т.е. решения системы (3), не применим. Предположим, что решения этой системы существуют и вычислим изменившиеся элементы матрицы первого приближения Q_v^* и Q_x^*:

$$Q_x^* = \delta\left(v^* \frac{s_x^*}{s^*} + k^*\sigma\right), \quad . (14)$$

$$Q_v^* = \frac{\delta}{\rho}[(\rho-1)\tau - \sigma], \quad \sigma \equiv \frac{x^* f_x^*}{f^*} > 0, \quad \tau \equiv \frac{v^* f_v^*}{f^*} > 0$$

Очевидно, что производная $Q_v^* < 0$ при $0 < \rho \le 1$, а при $s_x^* \ge 0$ производная $Q_x^* > 0$.

В силу (14) необходимые и достаточные условия (7) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tr} T^* &= q^*\left[\frac{a_x^*}{a^*} - \frac{q_x^*}{q^*} - \frac{1}{y^*}\right] + \frac{\delta}{\rho}[(\rho-1)\tau - \sigma] < 0 \\ \det T^* &= \delta q^*\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{a_x^*}{a^*} - \frac{q_x^*}{q^*} - \frac{1}{y^*}\right][(\rho-1)\tau - \sigma] - \frac{\varphi_x^*}{\varphi^*}\left[v^*\frac{s_x^*}{s^*} + k^*\sigma\right]\right\} > 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Пусть $q^* > 0$. Сопоставляя (9), (10) с (15), найдем, что в нашем случае для устойчивости состояний равновесия достаточные условия (11) надо дополнить неравенствами:

$$0 < \rho \le 1, \quad \frac{s_x^*}{s^*} + \frac{f_x^*}{f^*} \ge 0.$$

2. Исследование условий асимптотической устойчивости для модели с распределенным временным лагом формирования капитала. По-прежнему будем считать, что валовой национальный продукт делится на накопление и сбережения, последние целиком переходят в инвестиции (при равновесии на рынке капитала). Ранее, как и во многих агрегированных моделях экономического роста, предполагалось, что инвестиции мгновенно превращаются в основной капитал [2]. В то же время хорошо известно, что инвестиции осваиваются постепенно. Инвестиции разного вида переходят в основной капитал с различной временной задержкой – лагом (см. [8]). Условно говоря, превращение инвестиций в капитал происходит через систему массового обслуживания. Пропускная способность систем массового обслуживания зависит, главным образом, от среднего времени обслуживания одной заявки и мало зависит от закона распределения времени обслуживания. Ниже для описания процесса формирования основного капитала мы используем так называемую модель распределенного лага, которая представляет собой достаточно точный инструмент моделирования приращения основного капитала за счет инвестиций [10].

Процесс ввода инвестиций можно считать стационарным, т.е. объем инвестиций, образовавшихся в момент времени τ и освоенных к моменту времени t, зависит лишь от интервала освоения $\tau - t$. Кроме того, основная масса инвестиций сравнительно быстро переходит в основной капитал, а задержки бывают достаточно редко. В этих предположениях будем считать, что процесс превращения инвестиций в основной капитал представляет собой простейший поток однородных случайных событий (стационарный пуассоновский поток). Как известно, простейшим называется стационарный поток, обладающий свойствами ординарности (появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно) и отсутствия последействия [3]. Последнее свойство предполагает взаимную независимость появления событий в непересекающиеся интервалы времени и является наиболее ограничительным. Однако доказано, что при суммировании большого числа ординарных стационарных потоков с практически любым последействием получается поток сколь угодно близкий к простейшему. Складываемые потоки должны лишь оказывать на сумму приблизительно одинаковое малое влияние [3. С. 511].

Интервал времени между последовательными двумя соседними событиями в простейшем потоке представляет собой случайную величину, распределенную по показательному закону, плотность распределения которой задается при $t \geq 0$ формулой $n(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$. Среднее время между двумя событиями равняется $1/\lambda$, поэтому параметр λ задает интенсивность потока событий, т.е. определяет среднее число событий в единицу времени.

Обозначим через $I(\tau)$ объем инвестиций в момент времени τ, а через $w(t)$ – объем инвестиций, преобразованных к моменту времени t в основной капитал. К моменту времени $t > \tau$ будет освоено $n(t-\tau)I(\tau)$ инвестиций. Интегрируя по всем $\tau < t$, получим объем основного капитала, образованного за счет инвестирования:

$$w(t) = \lambda \int_{-\infty}^{t} I(\tau)\, e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau .$$

Дифференцируя это выражение по t, найдем, что $w(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dw(t)}{dt} = \lambda(I(t) - w(t)) .$$

Таким образом, динамика основного капитала в нашей модели описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv(t)}{dt} = w(t) - \delta v(t), \quad \frac{dw(t)}{dt} = \lambda(I(t) - w(t)) .$$

Здесь, как и раньше, $0 < \delta < 1$ – норма амортизации капитала.

Принимая стандартную связь между потоком инвестиций и производственной функцией, $I(\tau) = s f(v, x)$, где $0 < s < 1$ – постоянная норма сбережения, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику модели занятости с распределенным процессом инвестирования

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a(x)\,\varphi(v)\,y(x) - qx, \\ \frac{dv(t)}{dt} &= w(t) - \delta v(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \lambda\,(s f(v,x) - w(t)) \end{aligned} \quad . \qquad (16)$$

Свойства функций $f(v, x)$, $a(x)$ и $\varphi(v)$ те же, что и в предыдущем разделе, однако теперь производственная функция $f(v, x)$ считается линейно однородной, $q(x) = qx$, $q > 0$. Как и раньше, $y(x) = h - x$.

Стационарные точки определяются как решения системы уравнений

$$P(x,v) = a(x)\varphi(v)y(x) - qx = 0;$$
$$Q(x,v,w) = s\, f(v,x) - w;\ R(v,w) = w - \delta v = 0 .$$

Нетрудно видеть, что эта система сводится к уравнениям (3), поэтому равновесные состояния модели могут быть найдены указанным выше способом. Заметим, что при одинаковых параметрах стационарные состояния модели с лагом совпадают с равновесиями первой модели, не учитывающей лаг инвестиций.

Для невырожденных ($x^* > 0$, $v^* > 0$) состояний равновесия $a^*\varphi^* > 0$ и остается условие (4).

Выпишем матрицу первого приближения

$$S^* = \begin{pmatrix} P_x^* & P_{v*}^* & 0 \\ 0 & R_v^* & 1 \\ Q_x^* & Q_v^* & Q_w^* \end{pmatrix}$$

Здесь

$$P_x^* = q\left[x^* \frac{a_x^*}{a^*} - \frac{h}{y^*}\right], P_v^* = q\,x^* \frac{\varphi_v^*}{\varphi^*}, \quad R_v^* = -\delta,$$
$$Q_x^* = \delta\lambda k^* \sigma, \quad Q_v^* = \delta\lambda\tau, \quad Q_w^* = -\lambda.$$

Характеристический полином матрицы S^* представим в виде

$$-(\xi^3 + a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3) .$$

Коэффициенты полинома выражаются через элементы матрицы следующим образом

$$\begin{aligned} &a_1 = \delta + \lambda - P_x^*, \quad a_2 = -(\delta+\lambda)P_x^* - (Q_v^* - \delta\lambda), \\ &a_3 = P_x^*(Q_v^* - \delta\lambda) - P_v^* Q_x^* \end{aligned} .$$

Для устойчивости стационарного состояния необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома имели отрицательные вещественные части. Заметим, что это возможно только, если $a_3 > 0$. Точка покоя будет устойчивым узлом, если все три корня вещественны и отрицательны. Когда среди корней есть комплексно сопряженная пара, то при стремлении траекторий к состоянию равновесия будут наблюдаться осцилляции [13]. Проверим условия устойчивости с помощью критерия Гурвица. Критерий формулируется как система неравенств [4; 13; 14]:

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0 .$$

Преобразуем среднее неравенство к виду

$$a_1a_2 - a_3 = \frac{1}{k^*}Q_x^*\left(\delta + \lambda + k^*P_v^*\right) - a_1(\delta+\lambda)P_x^* > 0 \,. (17)$$

Поскольку $\delta\lambda - Q_v^* = Q_x^*/k^*$, то

$$a_3 = -\frac{Q_x^*}{k^*}\left(P_x^* + k^*P_v^*\right).$$

Заметим, что в силу $Q_x^* > 0$ условие $a_3 > 0$ совпадает с (10).

Таким образом, установление условий устойчивости состояний равновесия системы (16) сводится к проверке неравенств (10), (17) и неравенства $a_1 = \delta + \lambda - P_x^* > 0$. В частности, для устойчивости достаточно $P_v^* \geq 0$ и выполнения (10). Заметим, что эти же неравенства обеспечивали устойчивость и в первой модели. В свою очередь, для знакоопределенности производной P_v^* достаточно, чтобы $\varphi_v^*/\varphi^* \geq 0$.

Вернемся к примерам, о которых говорится в предыдущем разделе. Напомним, что $\varphi(v) = v$. Для устойчивости стационарных состояний достаточно условия $a_x^* < 0$. В частном случае $a(x) = ax$, $a > 0$, надо, как и в аналогичной модели предыдущего раздела, проверить (12). Тогда из (13) вытекает, что устойчивым будет лишь состояние x_1.

В варианте модели с функцией: $a(x) = a/x$, $a > 0$, равновесие устойчиво. Это выясняется совершенно так же, как в предыдущем разделе.

В исследованных примерах как для модели с мгновенным преобразованием инвестиций в капитал, так и для модели с распределенным лагом инвестиций совпали стационарные состояния и условия их устойчивости. Стало быть, в рамках рассмотренных вариантов моделей процесс постепенной трансформации инвестиций в основной капитал не влияет на естественный уровень безработицы.

В случае общей формулировки моделей, как мы уже отмечали, равновесия определяются одной и той же системой уравнений. Если при этом оказывается, что в точках равновесия $P_v^* \geq 0$, то для таких равновесий совпадают и достаточные условия устойчивости (неравенство (10)). Таким образом, в этой ситуации для обеих моделей естественные уровни безработицы совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

2. *Борисов К.Ю.* Агрегированные модели экономического роста. СПб.: СПбЭМИ РАН, 2005. 206 с.

3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятности. М.: ГИФ-МЛ, 1962. 564 с.

4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

5. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 606 с.

6. *Колесин И.Д.* Анализ механизма внутренней миграции с учетом эндогенного фактора // Экономика и мат. методы. 2012. Т. 48. № 3. С. 121–125.

7. *Колесин И.Д.* Принципы моделирования социальной самоорганизации. М.–СПб.–Краснодар: Лань, 2013. 281 с.

8. *Левин В.С.* Лаговые модели инвестиционных процессов с независимым временем // Вестник ОГУ. 2006. № 9 (59). Ч. 2. С. 215–220.

9. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 551 с.

10. Основы теории оптимального управления / под ред. В.Ф Кротова. М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.

11. *Ромер Д.* Высшая макроэкономика. М.: Дом Высшей школы экономики, 2015. 855 с.

12. *Сакс Д.Д., Ларрен Ф.* Макроэкономика. Глобальный подход. М.: Дело, 1996. 847 с.

13. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.–Ижевск: АНО «Институт Компьютерных исследований», 2003. 442 с.

14. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

15. *Romer D.* Advanced Macroeconomics // The McGraw-Hill Series in Economics. Fourth Edition. 2010. 716 p.