Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук, 2021, 25(4): 41–44

DOI 10.26163/RAEN.2021.72.24.005
УДК 532.5

S.Y. Malamanov, G.E. Skvortsov

HYDRODYNAMICS OF INTENSIVE PROCESSES. SHOCK WAVE PROBLEM

Stepan Malamanov – Professor of the Department of Deformable Solid Mechanics, D. F. Ustinov Baltic State Technical University «VOENMEH», Doctor of Physics and Mathematics, St. Petersburg; **e-mail: malamanov_siu@voenmeh.ru**.
Genrikh Skvortsov – member of the International Academy of Fundamental Education, member of the Creative Union of Inventors, St. Petersburg State University, PhD in Physics and Mathematics, St. Petersburg; **e-mail: skvor@nxt.ru**.

We look at the problem of the structure of a plane stationary shock wave. General hydrodynamics indicates the fundamental possibility of a closed macroscopic description of processes of a wide range of nonequilibrium. The question of the fundamental closability of the conservation equations at any degree of nonequilibrium has been positively resolved. The possibility of solving the problem of the shock wave structure in the full intensity range and for the entire flow field is shown.
Keywords: *plane shock wave; nonequilibrium process; intensity; gradient; free run; perturbation theory.*

С.Ю. Маламанов, Г.Е. Скворцов

ГИДРОДИНАМИКА ИНТЕНСИВНЫХ ПРОЦЕССОВ. ЗАДАЧА ОБ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Степан Юрьевич Маламанов – профессор кафедры «Механика деформируемого твёрдого тела», Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова, доктор физико-математических наук, г. Санкт-Петербург; **e-mail: malamanov_siu@voenmeh.ru**.
Генрих Евгеньевич Скворцов – академик Международной академии фундаментального образования, член Творческого Союза Изобретателей, Санкт-Петербургский государственный университет, кандидат физико-математических наук, г. Санкт-Петербург; **e-mail:skvor@nxt.ru**.

В статье рассмотрена задача о структуре стационарной плоской ударной волны. Общая гидродинамика указывает принципиальную возможность замкнутого макроскопического описания процессов широкого диапазона неравновесности. Положительно решен вопрос о принципиальной замыкаемости уравнений сохранения при любой степени неравновесности. Показана возможность решения задачи о структуре ударной волны в полном диапазоне интенсивности и для всего поля течения.
Ключевые слова: *плоская ударная волна; неравновесный процесс; интенсивность; градиентность; свободный пробег; теория возмущений.*

1. Задача о структуре стационарной плоской ударной волны (далее – УВ) в простом газе решалась различными методами в большом числе работ. Эта задача имеет, главным образом, методическое значение, будучи «пробным камнем» для различных подходов. Вместе с тем, описание существенно неравновесного процесса, каковым является сильная УВ, представляет интерес для теории неравновесных процессов. Эта задача дает пример недостаточности классической газодинамики с вязкостью и теплопроводностью. Интересным вопросом, связанным с задачей о структуре УВ, является поиск более прямого описания, нежели общепринятое, кинетическое. Решение кинетического уравнения, вычисление функции распре-

деления избыточно сложно, т.к. обычно достаточно знать несколько основных макроскопических величин (далее – ОМВ). Естественно стремление получить замкнутые уравнения для ОМВ.

Положительное решение данного вопроса дается в данной работе.

Попытка получить макроскопическое описание традиционным моментным способом или с использованием приближения Барнетта были малоуспешными. Более того, при интенсивности УВ $j = M - 1 > 1$ недостаточность таких подходов приобретает качественный характер.

Принципиальную возможность замкнутого макроскопического описания процессов широкого диапазона неравновесности указывает общая гидродинамика [2; 3; 4; 5]. В этой теории даются способы получения соответствующих уравнений.

2. Схема общей гидродинамики применительно к обсуждаемой задаче такова.

Исходным является стационарное одномерное уравнение Больцмана

$$\upsilon_1 \partial_x f = I[f, f] \tag{1}$$

с граничными условиями равновесия на концах

$$f(\vec{\upsilon}, x \to \mp\infty) = \rho_{1,2}(2\pi R T_{1,2})^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\upsilon_1 - U_{1,2})^2 + \upsilon_\perp^2}{2RT_{1,2}}\right] \equiv f_M \tag{2}$$

Величины $\rho_{1,2}$, $U_{1,2}$, $T_{1,2}$ связаны соотношениями Гюгонио, индексы 1,2 указывают значения «перед» и «за» УВ.

Для получения описаний в рамках гидродинамических переменных $\{\rho, \vec{U}, T\} \equiv \{\rho_\alpha\}$, $\alpha = 0,1,2$,

$$\rho\rho_\alpha = \int \psi_\alpha(\rho_\beta, \vec{\upsilon}) \cdot f(\vec{\upsilon}, x) \cdot d\vec{\upsilon} \equiv <\psi_\alpha, f> \quad ,$$

ψ_α – «микропризнаки» ρ_α, используем уравнения баланса-сохранения

$$<\psi_\alpha \upsilon_1, \partial_x f> = 0 \tag{3}$$

Для замыкания необходимо выразить потоки через гидропеременные. Чтобы сделать это, применим следующий способ. Представим функцию распределения в виде

$$f = f_\rho(\vec{\upsilon}, \rho_\beta(x)) + f_\perp(\vec{\upsilon}, x) \tag{4}$$

где первое слагаемое целесообразно выбирается в форме максвелловского распределения (см. (2)) $f_\rho = f_M$, второе слагаемое – «ортогональная часть», удовлетворяет условиям

$$\rho\rho_\alpha = <\psi_\alpha, f_M> \quad или \quad <\psi_\alpha, f_\perp> = 0 \tag{5}$$

При разбиении (4) уравнения (3) принимают вид $(\partial_\beta \equiv \partial / \partial\rho_\beta)$

$$<\psi_\alpha \upsilon_1, \partial_\beta f_M > d_x \rho_\beta + < g_{\varepsilon 1}, \partial_x f_\perp> = 0 \tag{6}$$

Первое слагаемое соответствует потоковым членам, а также градиенту давления.

Второе слагаемое (6) определяет необратимые потоки, вязкое напряжение и поток тепла. Для замыкания их следует выразить через гидропеременные.

Вводя разбиение (4) и (1) и производя соответствующие операции, получим для определения f_1 уравнение

$$\begin{gathered}\upsilon_1 \partial_x f_\perp = -\upsilon_1\left[\left(\partial_\rho f_M \cdot \frac{\rho}{U} + \frac{\partial f_M}{\partial U}\right) \cdot d_x U + \frac{\partial f_M}{\partial T} \cdot d_x T\right] + J[f_M, f_\perp] \\ J[f_M, f_\perp] \equiv L\|f_\perp\| + I[f_\perp, f_\perp] \quad , \quad L\|f_\perp\| \equiv I[f_M, f_\perp] + I[f_\perp, f_M]\end{gathered} \tag{7}$$

Из этого уравнения можно видеть, что ортогональная часть выражается через гидропеременные. Действительно, поскольку однородное уравнение (7) (без первого слагаемого) имеет только нулевое решение

($f_\perp$ *при* $x \to \mp\infty$ *обращается в нуль*), то его решение выражается через «неоднородность», т.е. ρ_α, *T*, *U*. Таким образом, вопрос о принципиальной замыкаемости уравнений сохранения при любой степени неравновесности (совместимой с моделью простого газа) решается положительно.

Формальное решение уравнения (7) имеет вид

$$f_\perp = [L - \upsilon_1 \cdot \partial_x]^{-1} g_{1\beta} f_M X_\beta \quad , \quad X_{1,2} = d_x U, T \tag{8}$$

Подставляя его во второй член в (6), получаем общее определяющее соотношение (ОС)

$$\pi_\alpha = < g_{1,\alpha}, [L - \upsilon_1 \cdot \partial_x]^{-1} g_{1,\beta} f_M > [X_\beta] \equiv -K_{\alpha,\beta}[X_\beta] \tag{9}$$

Операторы переноса $K_{\alpha,\chi}$ являются интегральными по координатам нелинейными операторами, и наряду с вязкостью и теплопроводностью, определяют перекрестный перенос: тепловязкость $K_{1,2}$ и вязкотеплопроводность $K_{2,1}$

3. Рассмотрим основные предельные случаи малой и большой интенсивности УВ.

В данной задаче фигурируют два параметра неравновесности: интенсивность УВ

$J = M - 1$ и градиентность $G_x^i = l_i \left| d_x \ln \rho_\alpha \right|$, $l_i(x)$ – свободный пробег в точке x, $l_i = \upsilon_T / \nu_i$.

1) $j \ll 1$, при этом $g_\alpha \ll 1$.

В этом случае операторы теории переноса определяются по стандартной теории возмущений. Выражение (далее –ОП), включающее n^{oe} приближение имеет вид:

$$K_{\alpha\beta}\left[X_\beta\right] \approx -< g_{1\alpha}, L^{-1}\bar{g}_{1\beta} > X_\beta + \sum_m^n < g_{1\alpha}, f_{\perp(m)} > \quad ,$$
$$f_{\perp(m)} = (-1)^{m+1}\left(L^{-1}\upsilon_1\right)^m \vec{g}_{1\beta} d_x^m X_\beta + \sum G_{\alpha(s)\beta\gamma} X_\beta^s X_\gamma^{m-s} + \cdots \qquad (10)$$

Такая зависимость реализуется посредством решения последовательными приближениями уравнения (7). Первое слагаемое, соответствующее классическому результату коэффициента переноса, умножается на «силу», последующие члены представляют собой операторы дифференцирования m-го порядка, а также m-степени сил и их «смесь». При этом получается градиентная теория порядка (n, m) n – порядок производных, m – степень сил X_β, аналог теории Энскога.

2) $j \gg 1$, $g_\alpha \ll 1$.

В этом случае рассматривается большое удаление от центра УВ; при этом оказываются существенными высокоскоростные частицы, для которых величина пробега $\upsilon / \nu(\upsilon) \to \infty$ *при* $\upsilon \to \infty$ (все реальные взаимодействия). Теория упрощается за счет возможности пренебречь в операторе столкновений членом прихода, т.е. использовать его приближенный вид

$$I[f,f] \approx -\nu_f(\upsilon)\cdot(f - f_M)$$
$$\nu_f = \int f(\upsilon_1)\cdot g\sigma(g,\upsilon) d\vec{\upsilon}_1 d\Omega \quad , \quad g \equiv \left|\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_1\right| \qquad (11)$$

Обратный оператор имеет в этом случае достаточно простой вид

$$f_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot h(s(x - x')) \cdot \exp\left[-\frac{\Lambda(x,x')}{s\upsilon_1}\right] \cdot g_{1\beta} f'_M X'_\beta dx' \quad , \quad s \equiv Sign(\upsilon_1) \qquad (12)$$

4. Ограниченная конкретизация операторов, проведенная выше, должна быть расширена для решения задачи о структуре УВ в полном диапазоне j и для всего поля течения.

В линейной теории предложен весьма действенный метод конкретизации вида ОС /2/.

Точномоментные выражения Фурье-Лапласовских образов ядер переноса конкретизируются с использованием интерполяции, а также опытных данных [5].

В нелинейной теории целесообразно использовать общие выражения ОП, которые формируются с помощью принципа соответствия и конкретизируются с использованием асимптотических зависимостей и опытных данных.

Другой способ заключается в использовании кинетического уравнения, упрощенного посредством применения модельного, приближенного оператора столкновений.

$$\pi = -\hat{\eta}\left[X_U\right] + \hat{\chi}_\pi\left[X_T\right] \quad ,$$
$$q = \hat{\chi}_q\left[X_U\right] - \hat{\lambda}\left[X_T\right] \qquad (13)$$

операторы переноса выбираются в виде

$$K_{\alpha\beta}\left[X_\beta\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\rho' P_{\alpha\beta}(U,U',V)\exp\left[-L_{\alpha\beta}(U',V)\right] X_\phi \quad , \qquad (14)$$

$$L_{\alpha\beta} = P_{2,\alpha\beta}(U',V) \quad , \quad V = (1 + a\xi)^{\gamma/2} \quad , \quad \xi = \nu(n',T',U')\frac{|x - x'|}{\upsilon'_T \cdot (U')^3} \quad , \qquad (15)$$

$U = \upsilon / \upsilon_T$, υ – скорость в системе УВ, υ_T – тепловая, ν – частота столкновений; $P_{\alpha\beta}$, $P_{2,\varepsilon\beta}$ – многочлены степени α+β+2 и γ=2/(3-s), s – показатель зависимости $\nu \approx |U|^s$ при $U \to \infty$.

Частичная конкретизация зависимостей (14, 15) осуществляется посредством сопоставления с предельными выражениями ОП, данными выше.

Продемонстрируем способ получения ОП с использованием упрощенного кинетического уравнения. Возьмем простейшее приближение оператора столкновений

$$I[f,f] = -\nu_f(f - f_M) \qquad (16)$$

$\nu_f(n,T)$ не зависит от скорости частиц. Производя сокращение описания согласно указанной схеме, решая соответствующее кинетическое уравнение для $f_\perp$ и вычисляя по $f_\perp$ ядра переноса, получаем для оператора вязкости

$$K_{11} \to -\frac{2}{\sqrt{\pi}} h(x - x')\rho'\upsilon'_T\left[(g_3^+ - g_3^-) - (g_2^+ - g_2^-)(2w - w') + (g_1^+ + g_1^-)(w^2 + 2ww') - (g_0^+ + g_0^-)w'w^2\right] \qquad (17)$$

и аналогичные зависимости для других ядер. Здесь $h(x)$ – функция Хевисайда,

$$g_n^\pm = \int_0^\infty d\upsilon \cdot \upsilon^n \exp\left[-(\upsilon \mp w')^2 - \frac{\Lambda}{\upsilon}\right] \quad , \quad \Lambda = \frac{1}{\upsilon'_T}\left|\int_x^{x'} \nu'(n,s)T(s)ds\right| \quad ,$$
$$f' \equiv f(x') \quad , \quad w = \frac{U}{\upsilon_T} \quad , \quad \upsilon_T = \sqrt{2kT} \qquad (18)$$

Естественное упрощение заключается в замене спецфункции $g_n^{\pm}$ более простым интерполяционным выражением. Последнее получается методом наискорейшего спуска. Более существенная функция g_n^{+} хорошо приближается такой зависимостью,

$$g_n^{+}(w,\Lambda) \approx \sqrt{\pi}\left(\frac{\upsilon_0/w}{3\upsilon_0/n'-2}\right)^{1/2}\upsilon_0^n \exp\left[-w^2\left(\frac{\upsilon_0}{w}-1\right)\left(3\frac{\upsilon_0}{w}-1\right)\right], \quad \frac{\upsilon_0}{w} \approx \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{3^{3/2}}{2}\frac{\Lambda}{w^3}\right)^{1/3} \tag{19}$$

В качестве результата использования выражений (14) или (19) приведем вид гидропеременных вдали от центра УВ

$$\Delta\rho, U, T \approx \exp\left[-\left(\frac{x}{e}\right)^{2/(3-s)}\right] \tag{20}$$

Подобную зависимость получил Р.Г. Баранцев, решая кинетическое уравнение [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранцев Р.Г.* Метод интегральных моментных кинетических уравнений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 5. С. 1038–1041.

2. *Скворцов Г.Е.* О макроскопической теории быстрых процессов в трансляционно-инвариантных системах // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. № 2. С. 502–515.

3. *Скворцов Г.Е.* О теории быстрых и высокоградиентных процессов малой амплитуды // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. № 3. С. 956–973.

4. *Скворцов Г.Е.* Об общей гидродинамике // Вестник ЛГУ. 1976. № 1. С. 112–116.

5. *Скворцов Г.Е.* Гидродинамика структурных релаксирующих жидкостей // Вестник ЛГУ. 1979. № 13. С. 94–98.