

*G.P. Lyapunova*

## **ANALYSIS OF PROPERTIES OF SOLUTIONS OF MULTI-CRITERIA MODEL OF OPERATING RELATIONS OF TERRITORIAL FORMATIONS OF URBAN AGGLOMERATION**

*The research has been made within the study of coordinated development of cities, regions and natural environment applying mathematical models aimed at sustainable development of urban environment, industry and transport infrastructure using data analysis, grant AAAA-A19-119021390164-1*

**Galina Lyapunova** – senior researcher, the Laboratory of Mathematical Modelling of Functional-Spatial Development of Cities, Institute of Regional Economics, Russian Academy of Sciences, PhD in Economics, associate professor, St. Petersburg; e-mail: [glyapunova@yandex.ru](mailto:glyapunova@yandex.ru).

*The research is aimed at analysing and interpreting the properties of the mathematical model of the distribution of urban functions between territorial formations of an urban agglomeration. The model relies on the information about the existing and desired functional security of territorial entities and their investment attractiveness. The modelling process is focused on creating such a distribution of functions between territorial entities that secure maximum economic effect. We present and consider at the content level our own assumptions made when constructing the model, and substantiate the choice of the method for finding an optimal solution; its conditions at formalized and content levels are looked at.*

**Keywords:** functional load; territorial entity; investment attractiveness; transport problem; modeling; functional load distribution.

*Г.П. Ляпунова*

## **АНАЛИЗ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ТЕРРИТОРИАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ ГОРОДСКОЙ АГЛОМЕРАЦИИ**

*Работа выполнена в рамках темы НИР «Исследование согласованного развития городов, регионов и природной среды методами математического моделирования, направленное на устойчивое развитие городской среды, промышленности и транспортной инфраструктуры с использованием методов анализа данных», номер Г.Р. AAAA-A19-119021390164-1*

**Галина Платоновна Ляпунова** – старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования функционально-пространственного развития городов, Институт проблем региональной экономики Российской академии наук (ИПРЭ РАН), кандидат экономических наук, доцент, г. Санкт-Петербург; e-mail: [glyapunova@yandex.ru](mailto:glyapunova@yandex.ru).

*Задачей проводимого исследования является анализ и интерпретация свойств математической модели распределения городских функций между территориальными об-*

разованиями городской агломерации. В модели используется информация об имеющейся и желаемой функциональной обеспеченности территориальных образований и их инвестиционной привлекательности. Процесс моделирования ориентирован на создание такого распределения функций между территориальными образованиями, при котором максимизируется суммарный экономический эффект. В статье приведены и рассмотрены на содержательном уровне допущения, сделанные автором при построении модели, обоснован выбор метода нахождения оптимального решения, рассмотрены условия его существования на формализованном и содержательном уровнях.

**Ключевые слова:** функциональная нагрузка; территориальное образование; инвестиционная привлекательность; транспортная задача; моделирование; распределение функциональной нагрузки.

Рациональное размещение функциональной нагрузки является одной из задач социально-экономической политики городской агломерации, поскольку в процессе ее формирования и развития неизбежно возникает дисбаланс в обеспеченности объектами инфраструктуры входящих в ее состав территориальных образований. Процесс распределения осложняется тем обстоятельством, что должен осуществляться не только с учетом особенностей местоположения выделяемых для разных целей пространственных ресурсов и их стоимости, но и с учетом инвестиционной привлекательности территориальных образований для девелоперов<sup>1</sup>.

Например, в 2020 г. в Петербурге за счёт инвесторов введено в эксплуатацию три школы на 4125 мест, 13 детских садов на 1735 мест, пять объектов здравоохранения и пять зданий иного назначения. Отметим, в 2019 г. за счёт средств частных инвесторов в городе введено в эксплуатацию 25 объектов социальной инфраструктуры. В 2021 г. планируется ввод 25 зданий. В качестве инвесторов выступают, как правило, одни и те же крупные строительные корпорации, осуществляющие массовую застройку на территории агломерации. Такой подход к развитию городских функций, хотя и является экономически целесообразным, не позволяет исправить положение со сложившимся неравномерным распределением функциональной нагрузки (см. рисунок), поскольку отодвигает на второй план другие критерии принятия решений. В этом состоит главное отличие текущей ситуации от периода главенства централизованного управления социально-

экономическим развитием.

В современных условиях при наличии многих заинтересованных сторон в результатах распределения функциональной нагрузки требуется принятие решения на конкурентной основе, т.е. процесс распределения функциональной нагрузки должен осуществляться с учетом интересов (оценочных критериев) всех участников процесса распределения – городской агломерации, входящих в нее территориальных образований, потенциальных инвесторов. Таким образом, в процессе моделирования должны решаться две задачи:

1. Определение эффективной функциональной нагрузки для каждого территориального образования в зависимости от его обеспеченности и потребностей населения.

2. Распределение городских функций (функциональное зонирование) с учетом инвестиционной привлекательности территориальных образований.

В общем случае модель распределения функциональной нагрузки между территориальными образованиями крупного города можно описать следующим образом. Необходимо произвести такое распределение функциональной нагрузки  $X = (X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$  между территориальными образованиями ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) в периоде  $T$ , при котором экономическая эффективность  $X = (X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$  распределения будет максимальной. Пусть  $X_j$  – суммарная стоимость выделенной территориальному образованию функциональной нагрузки, тогда  $f_j(X_j)$  – неубывающая функция неотрицательного аргумента вида

$$X_j = \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m p_i a_{ij},$$

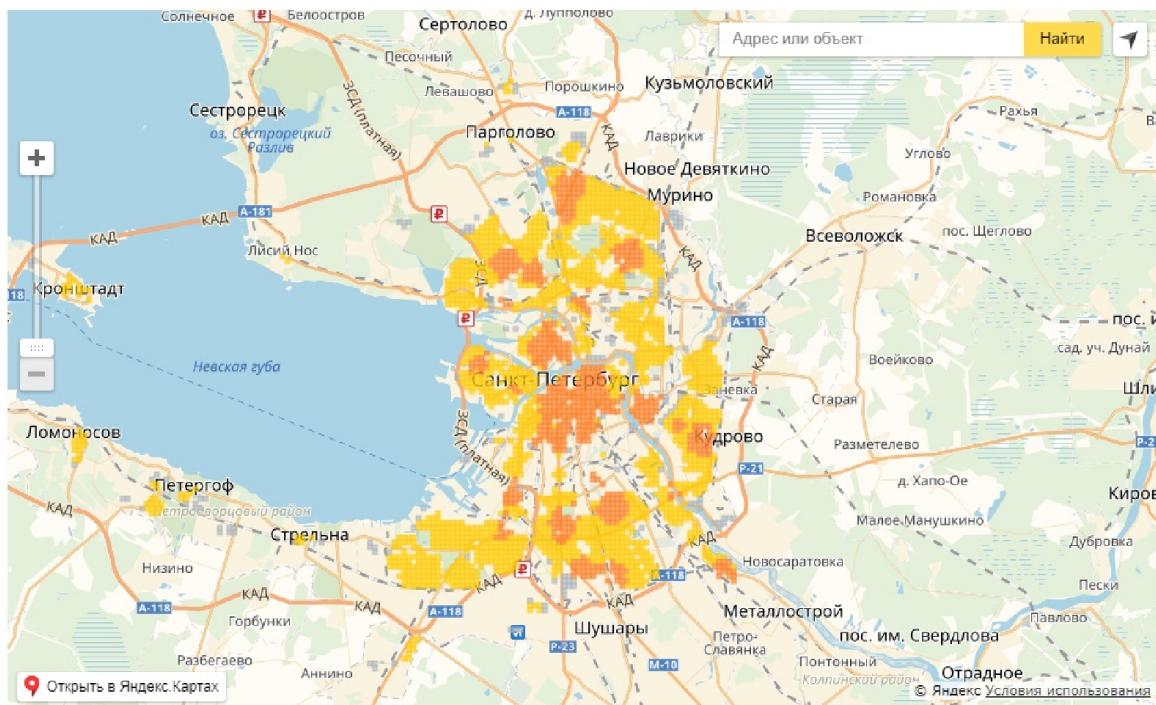
где  $x_{ij}$  – искомая величина функциональной

<sup>1</sup> Подходы к выявлению бизнес-интересов рассмотрены нами в [1].

Санкт-Петербург с точки зрения доступности инфраструктуры для жизни

Кликните на квадрат, чтобы увидеть подробности.

■ Недостаточно инфраструктуры ■ Удобно для жизни ■ Очень удобно для жизни



ПО ДАННЫМ ЯНДЕКС.КАРТ. ФЕВРАЛЬ 2017

Карта размещения объектов социальной инфраструктуры в г. Санкт-Петербурге  
Источник: [5].

нагрузки  $i$ , которая будет предоставлена территориальному образованию  $j$ ;  $p_i$  – стоимость создания единицы функциональной нагрузки  $i$ .

Как показано в [3], в качестве меры стоимости функциональной нагрузки  $i$  может рассматриваться либо среднерыночная цена земли городской агломерации, либо удельная стоимость создания соответствующего объекта.

С учетом сделанных предположений под совокупным экономическим эффектом  $F$  от распределения функциональной нагрузки будем понимать функцию от стоимостной оценки функциональной нагрузки (инвестиций в функциональную нагрузку), получаемой каждым территориальным образованием:  $F(X) = \sum_j f_j(X_j)$ .

Для решения полученной многокритериальной задачи воспользуемся методом свертки частных критериев в обобщенный критерий. Предположим, что функции  $f_j$  линейны и имеют вид  $f_j = c_j X_j$ ,  $c_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Тогда целевая функция модели будет

иметь вид

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i c_j x_{ij}. \quad (1)$$

Параметры  $c_j$ ,  $c_j \geq 0$  будем интерпретировать как экспертные оценки инвестиционной привлекательности территориального образования  $j$  для инвесторов. Для определения оценок  $c_j$  можно использовать подход, предложенный в [6] применительно к модели оценки потенциального рентного дохода каждого вида землепользования с учетом характеристик конкретной территории.

В качестве ограничений модели рассматриваются условия:

$$0 \leq x_{ij} \leq a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

где  $x_{ij}$  – искомое количество функциональной нагрузки  $i$ , которое будет выделено территориальному образованию  $j$ ;

$a_{ij}$  – величина функциональной нагрузки  $i$ , необходимой территориальному образованию  $j$ , га;

$b_i$  – доступная для распределения функциональная нагрузка  $i$ , га.

Таким образом, для того, чтобы найти распределение функциональной нагрузки между территориальными образованиями, необходимо решение задачи на максимизацию функционала вида (1) при условиях (2), (3). Полученное решение позволяет максимизировать суммарный для всего города экономический эффект от сплошного распределения.

Проведем детальный анализ исходных предпосылок, лежащих в основе построения целевой функции построенной модели:

- Возможность измерения социально-экономической эффективности распределения функциональной нагрузки для каждого территориального образования.

Это предположение является в методологическом плане наиболее сильным и поэтому наиболее уязвимым. Измерение социально-экономической эффективности предполагает, прежде всего, умение соизмерять социальные и экономические факторы, влияющие на процесс или систему, и, соответственно, выражать их в одних и тех же единицах. Таким образом, ключевой проблемой здесь является наличие общепринятой методики соизмерения социального и экономического эффекта, причем проблема как на содержательном, так и на формализованном уровнях пока находится в стадии разработки. Применительно к рассматриваемой задаче нетривиальным является, например, вопрос о составе социальных и экономических факторов, подлежащих учету.

В качестве первого приближения здесь можно принять перечень факторов, фигурирующих в территориальных планах социально-экономического развития. Что касается вопросов соизмерения, то один из возможных подходов здесь заключается в попытке установления количественных связей между улучшением того или иного социального показателя и вызываемым им повышением основных экономических показателей. С учетом данных обстоятельств в нашем случае в качестве оценочного критерия рассматривается только экономический эффект от распределения, социальная составляющая процесса распреде-

ления представлена системой ограничений.

- Возможность однокритериальной оценки социально-экономической эффективности распределения функциональной нагрузки для каждого территориального образования.

Предположение также является достаточно сильным, т.к. в большинстве случаев одного сводного показателя оказывается недостаточно для оценки влияния каких-либо факторов на состояние системы в целом. Комплексный характер процесса распределения территориальных ресурсов требует максимальной эффективности их использования с точки зрения достижения целей развития, многие из которых тесно взаимосвязаны. Первоочередной задачей здесь является обеспечение возможности количественного выражения всех целей.

С позиции моделирования формальная сторона учета нескольких целей при распределении функциональной нагрузки при выполнении этого условия особых затруднений не вызывает. Например, если все цели охарактеризованы количественно, то по каждой из них можно задать некоторые эталонные значения. Это дает возможность в качестве цели рассматривать минимизацию отклонений от эталона. Такая методика применялась нами, например, в [4].

При многокритериальной постановке задачи может возникнуть вопрос о принципах нахождения наилучшего решения, который не является тривиальным как с теоретической, так и практической стороны, поскольку допускает большое количество вариантов и требует самостоятельного содержательного рассмотрения.

- Возможность представления оценки социально-экономической эффективности распределения функциональной нагрузки для агломерации территориальных образований в виде суммы оценок социально-экономической эффективности распределения функциональной нагрузки для каждого территориального образования.

Данное предположение связано с аддитивностью агломерационного эффекта и носит чисто технический характер, поскольку аддитивность совокупного критерия в базовой модели вытекает из характера взаимосвязи локальных критериев эф-

фективности. В рассматриваемой модели в силу ограниченности ресурсов, выделяемых городской агломерацией на осуществление соответствующих мероприятий в плановом периоде, выполняется условие коррелированности, допустима также аддитивная свертка частных критериев.

Проведенный анализ сделанных предположений позволяет утверждать, что связанные с ними проблемы большей частью лежат вне математической модели и связаны с содержательной постановкой задачи.

Таким образом, задачу можно описать как выбор для каждого территориального образования такого распределения функциональной нагрузки, чтобы выполнялось ресурсное ограничение, а суммарный экономический эффект был бы максимальным.

Задача (1), (2), (3) является задачей линейного программирования транспортного типа. Таким образом, оптимальное распределение функциональной нагрузки между территориальными образованиями возможно при выполнении равенства:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{Условие баланса})$$

Поскольку любая транспортная задача, у которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей (необходимое и достаточное условие), имеет решение.

Если условие баланса не выполнено, возможны два случая:

А. Потребность в объемах функциональной нагрузки меньше возможности по ее выделению в плановом периоде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

В этом случае проблема решается корректировкой величин  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Б. Потребность в объемах функциональной нагрузки превышает возможности по ее выделению в плановом периоде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} > b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

В этом случае можно ввести фиктивное территориальное образование  $(n + 1)$  с потребностью

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \geq b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \text{ и } c_{n+1} = 0.$$

При решении данной задачи возможны следующие результаты:

- 1) условия задачи несовместны (система не имеет неотрицательных решений);
- 2) неотрицательные решения имеются, но экстремума нет (целевая функция стремится к бесконечности);
- 3) задача имеет множество решений (множество оптимальных вариантов распределения функциональной нагрузки);
- 4) задача имеет единственное решение, допустимое и оптимальное.

Первый и второй варианты возможны при неправильной экономической постановке задачи или при наложении слишком жестких ограничений. Например, величины требуемой функциональной нагрузки для какого-то территориального образования превосходят суммарные объемы планируемой нагрузки; какое-то территориальное образование имеет бесконечно высокий приоритет инвестиционной привлекательности относительно других; все территориальные образования имеют нулевой приоритет для инвесторов.

Задача (1), (2), (3) может решаться любым из методов решения транспортных задач, наиболее универсальные из которых базируются на поэтапном переходе от исходного варианта плана (допустимого или предпочтительного) к оптимальному. Однако, как показал А.А. Корбут в [2], более простым и эффективным методом решения задач вида (1), (2), (3) является использование алгоритмов пожирающего типа (GREEDY). *Общий принцип решения* задач состоит в этом случае в последовательном переходе от решения упрощенного варианта задачи к решению исходной задачи.

На первом этапе условие (2) исходной задачи заменяется условием  $0 \leq x_{ij} \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Это означает применительно к рассматриваемой модели, что решение задачи не учитывает величину функциональной нагрузки  $a_{ij}$ , вида  $i$ , необходимой территориальному образованию  $j$ . И процесс нахождения варианта распределения функциональной нагрузки сводится к поиску решений  $m$  независимых задач линейного программирования с одним ограничением. Каждая такая задача имеет только одно оптимальное значение, кото-

рому соответствует максимальный коэффициент целевой функции ( $\max_i p_i c_i$ ). Соответствующие максимальным значениям величины функциональной нагрузки будут равны  $b_i$ , т.е. доступной для распределения функциональной нагрузки  $i$  площади города, га. Иными словами, решение будет состоять из величин  $b_i$  и нулей. Это соответствует ситуациям, когда:

1) агломерация территориальных образований располагает очень небольшими возможностями по созданию новых центров оказания услуг населению. Причиной может быть высокая плотность застройки, особенности рельефа местности, особенности правоотношений в земельной сфере. Иными словами, некоторые территориальные образования не могут получить функциональную нагрузку по объективным причинам;

2) проблема увеличения функциональной нагрузки актуальна только для части территориальных образований, например, районов новой застройки или пригородных зон на границе агломерации.

Как показал А.А. Корбут, найденное таким образом решение будет обеспечивать максимальный экономический эффект для каждого территориального образования и в случае выполнения условия (2). Соответственно, для нахождения оптимального решения необходимо упорядочить  $p_i c_i$  в порядке не возрастания и брать последовательно максимально возможные  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), пока не будет нарушаться условие (2).

Полученное распределение функциональной нагрузки предоставляет приоритет тем видам деятельности для данной территории, которые наиболее привлекательны для инвесторов, и создает основу для формирования вышеупомянутых экономических характеристик земельных участков территориального образования (ставка земельного налога, величина выкупной цены и пр.).

Рассмотрим теперь обобщённый вариант модели, в котором требуется максимизировать функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^n f_j(X_j) \quad (4)$$

при условиях (2) и (3), и в котором не на-

кладываются ограничения на свойства функций  $f_j$ .

Из этих условий следует, что  $X_j = \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m a_i x_{ij}$ , и, обозначив правую часть этого неравенства через  $q_j$ , получаем ограничение вида

$$0 \leq X_j \leq q_j, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Представим теперь  $X_j$  следующим образом

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m p_i b_i,$$

Правую часть неравенства обозначим через  $C$ , получаем условие вида

$$\sum_{j=1}^n X_j \leq C. \quad (6)$$

В результате сделанных преобразований исходная задача может быть представлена как стандартная задача распределения одномерного ресурса (4), (5), (6), которая решается с помощью составления системы рекуррентных соотношений вида:

$$\varphi_1(C) = \max_{0 \leq X_1 \leq q_1} f_1(X_1),$$

$$\varphi_k(C) = \max_{0 \leq X_k \leq q_k} \{f_k(X_k) + \varphi_{k-1}(C - X_k)\}.$$

Эта система легко решается численно независимо от свойств функции  $f_k$ , наличия или отсутствия ограничений целочисленности на переменные  $X_k$  и т.д.

Развитие методов распределения функциональной нагрузки между территориальными образованиями крупных городов будет способствовать повышению роли городов в качестве опорных элементов региональных систем расселения разного типа. Увеличение функционального разнообразия и территориальной протяженности функций городских территориальных образований является необходимым условием развертывания крупного города в агломерацию, формирования обширных урбанизированных районов и зон.

Построенная модель может рассматриваться как базовая, поскольку представляет собой прототип целого семейства моделей распределения региональных ресурсов. В ее рамках, например, можно учитывать возможную взаимозаменяемость раз-

личных видов функциональной нагрузки, вклад различных территориальных образований в достижение одних и тех же целей развития и вносить различные уточнения, диктуемые содержательной постановкой задачи. В частности, может быть построен динамический вариант данной модели, учитывающий распределение ресурсов по отдельным этапам периода планирования. Структура задачи позволяет достаточно легко вводить дополнительные условия, влияющие на характер распределения, либо путем расширения множества ограничений, либо усложнением структуры априорного предпочтения. Поскольку объекты в составе видов функциональной нагрузки могут функционировать на различных условиях (самоокупаемость, субсидирование, извлечение прибыли), целесообразно, например, ввести ограничение вида:

$$C_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} p_i^t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

где  $C_i > 0$  – суммарная ожидаемая доходность от  $i$ -го вида функционального использования за период эксплуатации  $t_i$ , рассчитанная по прогнозным данным, а  $p_i^t$  – дисконтированные значения величин  $p_i$  на момент окончания периода эксплуатации  $t$ .

Кроме того, при формировании априорного предпочтения могут быть учтены дополнительные требования со стороны различных видов функциональной нагрузки к размерам занимаемых участков территории (например, ограничение на минимальный размер занимаемой территории).

Отметим еще один момент, вытекающий из постановки базовой модели. В модели предполагается, что имеется только один вариант функциональной нагрузки территориального образования, и ее уровень зависит от объема запланированных вложений. Такое предположение не учитывает объективную ограниченность ре-

урсов и безосновательно расширяет область допустимых решений задачи. Более реалистичным является предположение о том, что для каждого территориального образования возможно сформировать несколько вариантов распределения функциональной нагрузки, различных по затратам ресурсов и по конечным результатам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Булычева Н.В., Ляпунова Г.П. Выявление и оценка бизнес-интересов в локальных центрах полигонтического города // Финансы и бизнес. 2016. № 2. С. 20–27.
2. Корбут А.А., Ляпунов А.Н. Оптимизационные модели социально-экономического развития региона // Препринт. науч. доклада. АН СССР, Ленингр. науч. центр, Ин-т соц.-экон. проблем, 1987.
3. Ляпунова Г.П. Экономико-математическая модель распределения функций между территориальными образованиями городской агломерации // Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук. 2019. № 3. С. 34–41.
4. Ляпунова Г.П., Лисененков А.И. Многомерная оценка условий ведения бизнеса в субъектах Российской Федерации // Факторы развития экономики России: сб. трудов VIII Международ. науч.-практ. конф. / под ред. В.А. Петрищева (отв. редактор), Л.А. Карасевой, А.В. Романюка. Тверь, 2016. С. 177–182.
5. Санкт-Петербург для жизни и для развлечений. URL: <https://yandex.ru/company/researches/2017/spb/districts> (дата обращения: 23.07.2021).
6. Федоров В.П., Пахомова О.М., Булычева Н.В. Земля в городе и проблема ее массовой рыночной оценки // Мониторинг социально-экономической ситуации и состояния рынка труда Санкт-Петербурга. 1997. № 1. С. 32–40.